ಹರರ ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ತ್ರಿವಳಿ

ಹರಗೋಪಾಲ್ ಆರ್.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜಗತ್ತು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಲೋಕಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂದು ಕಂಡರೂ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾದ ಹಲವು ಸಂಬಂಧಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ನ *ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್* ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಪಂಚಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತಹ ಹಲವಾರು ಸೊಗಸಾದ ಸಂಬಂಧಗಳು ಉಲ್ಲೇಖವಾಗಿವೆ.

ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿರುವ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ ಇದು: a, b, c ಗಳು ಮೂರು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ, ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ $a + b > c$, $b + c > a$ ಮತ್ತು $c + a > b$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, a, b, c ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಬಂಧ: ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ತ್ರಿಭುಜವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. a, b, c ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರಲ್ಲಿ $a^2 + b^2 = c^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ c ಬಾಹುವಿಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಬಗ್ಗೆಯೇ ಯೋಚಿಸುತ್ತಿದ್ದಾಗ n ಒಂದು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವಾಗ $a^n + b^n = c^n$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗ್ಗೆ ಕುತೂಹಲ ಮೂಡಿತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

• $n = -1$ ಆದರೆ, ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ: a, b, c ಗಳ ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $1/a + 1/b = 1/c$ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ?

• $n = -2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ: a, b, c ಗಳ ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, $1/a^2 + 1/b^2 = 1/c^2$ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ?

ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಅವಲೋಕಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಜ್ಯಾಮಿತಿ, ತ್ರಿಭುಜ ಅಸಮತೆ, ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ, ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತ.

$n = -1$ ಆದಾಗ. ಇಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣವು $1/a + 1/b = 1/c$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಿವರಣೆ ಕೊಡದೆ ಪರಿಹಾರ ಮಾತ್ರ ಕೊಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆ. $n = -2$ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ಅಚ್ಚರಿಗಳಿಗೆ ಎಡೆ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಮೇಲೆ ಹೆಚ್ಚು ಗಮನ ನೀಡಲು ಬಯಸುತ್ತೇನೆ. . $n = -1$ ಗೆ ಇದೋ ಕೆಲವು ಪರಿಹಾರಗಳು:
$(a, b, c) = (2, 2, 1), (3, 6, 2), (4, 12, 3), (5, 20, 4), (6, 30, 5), (7, 42, 6), (8, 56, 7), \ldots$

$n = -2$ ಆದಾಗ. $n = -2$ ಆದಾಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು: $1/a^2 + 1/b^2 = 1/c^2$.

ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ, ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೊಂದಿಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸುವುದರ ಬದಲು ತ್ರಿಭುಜದ ಇತರ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾದ ಲಂಬೋನ್ನತಿ, ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಹೇಗೆ?

ಎರಡು ಲಂಬೋನ್ನತಿ (altitude)ಗಳ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಲಂಬೋನ್ನತಿಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತಹ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, a, b, c ಬಾಹುಗಳಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬೋನ್ನತಿಗಳನ್ನು h_a, h_b, h_c ಎಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ (a ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಲಂಬೋನ್ನತಿ h_a, ಇತ್ಯಾದಿ). ಈಗ ನಾವು ಕೇಳುವ ಪ್ರಶ್ನೆ a, b, c ಗಳ ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣ $h^2_a + h^2_b = h^2_c$ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಅರಿಯಲು, ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ Δ ವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ:

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ah_a = \frac{1}{2}\, bh_b = \frac{1}{2}\, ch_c.$$

ಈ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ,

$$h_a = \frac{2\Delta}{a},\quad h_b = \frac{2\Delta}{b},\quad h_c = \frac{2\Delta}{c}$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, ,

$$h^2_a + h^2_b = h^2_c \text{ ಆದರೆ,}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ವಿಲೋಮದಲ್ಲಿಯೂ ಇದು ಋಜುವಾತಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, $1/a^2 + 1/b^2 = 1/c^2$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ a, b, c ಬಾಹುಗಳಿರುವ ತ್ರಿಭುಜವೊಂದನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆಗ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಬಾಹು a, b ಗಳ ಮೇಲಿನ ಲಂಬೋನ್ನತಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬಾಹು cನ ಮೇಲಿನ ಲಂಬೋನ್ನತಿಯ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಂತಹ ತ್ರಿಭುಜವೊಂದು ಇದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ನಾನು 'ಹರರ ತ್ರಿಭುಜ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಅಂತಹ ತ್ರಿವಳಿ (a, b, c) ಯನ್ನು 'ಹರರ ತ್ರಿವಳಿ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇನೆ.

ಈಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳುಳ್ಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹುಡುಕೋಣ:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2} \qquad (1)$$

ಇದು ನಮಗೆ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ತ್ರಿವಳಿ (x, y, z)ಅನ್ನು ನೆನಪಿಗೆ ತರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಇದು ,

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ

ಇಂತಹ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರವು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ:

$$x = 2m,\ y = m^2 - 1,\ z = m^2 + 1. \qquad (2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $$a : b : c = \frac{1}{2m} : \frac{1}{m^2-1} : \frac{1}{m^2+1} \qquad (3)$$

ಎಂದು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಂಡರೆ ತ್ರಿವಳಿ (a, b, c) ಯು ಸಮೀಕರಣ (1) ಅನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸರಳ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ ಇಡೀ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $2m \cdot (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 1)$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$a = (m^2 - 1)(m^2 + 1),\ b = 2m(m^2 + 1),\ c = 2m(m^2 - 1) \qquad (4)$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $m > 1$ ಗೆ, $a = (m^2 - 1)(m^2 + 1)$, $b = 2m(m^2 + 1)$, $c = 2m(m^2 - 1)$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ $m > 1$ಗೆ, $2m(m^2 + 1)$, $(m^2 - 1)(m^2 + 1)$ ಮತ್ತು $2m(m^2 - 1)$ ಗಳನ್ನು ಬಾಹುಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜವು ಎರಡು ಲಂಬೋನ್ನತಿಗಳ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಲಂಬೋನ್ನತಿಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪಡೆದ ಹರರ ತ್ರಿವಳಿಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ:

m	$a = (m^2 - 1)(m^2 + 1)$	$b = 2m(m^2 + 1)$	$c = 2m(m^2 - 1)$
2	15	20	12
3	80	60	48
4	255	136	120
5	624	260	240
6	1295	444	420
7	2400	700	672
8	4095	1040	1008
9	6560	1476	1440
10	9999	2020	1980

ನಾವು a, b, c ಗಳ ಮಸಾಅವನ್ನು a, b, c ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ (ತನ್ಮೂಲಕ ಮೂಲ ತ್ರಿಭುಜದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಗುಣಗಳನ್ನೇ ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಪಡೆದು) ನಾವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ a', b', c' ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ತ್ರಿವಳಿಗಳಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮೂಲ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದ್ದು, ಅದೇ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

m	a'	b'	c'
2	15	20	12
3	20	15	12
4	255	136	120
5	156	65	60
6	1295	444	420
7	600	175	168
8	4095	1040	1008
9	1640	369	360
10	9999	2020	1980

ಸಮಾರೋಪ ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಮೇಲ್ಕಂಡ ಅನ್ವೇಷಣೆಯು ನಮ್ಮ ಮನದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಎಡೆ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಲಂಬೋನ್ನತಿಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಕೋನಭೇದಕಗಳಿಗೆ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ ಯಾವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ದೊರೆಯಬಹುದೆಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ನಾವು ಅವಕಾಶ ನೀಡಬಹುದು.

ಹರಗೋಪಾಲ್ ಆರ್ ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶದ ಕರ್ನೂಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮುನಿಸಿಪಲ್ ಶಾಲೆಯ ಉತ್ಸಾಹಿ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ಗುಣಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸುವಲ್ಲಿ ಒಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಇವರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನ್ವೇಷಣೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅದ್ಭುತವನ್ನೇ ಸಾಧಿಸುತ್ತಾರೆಂಬ ದೃಢ ನಂಬಿಕೆ ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. 'ರೈಸಿಂಗ್ ಎ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಫೌಂಡೇಷನ್' (ಗಣಿತದ ಉನ್ನತಿಗಾಗಿ ದುಡಿಯುವ ಒಂದು ಲಾಭರಹಿತ ಸಂಸ್ಥೆ) ಸಂಸ್ಥೆಯ ಬೋಧಕ ವರ್ಗದ ಸದಸ್ಯರೂ ಆಗಿರುವ ಇವರು ಶಿಕ್ಷಕ ತರಬೇತಿ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನೂ ನಡೆಸುತ್ತಾರೆ. ಇವರ ಇಮೇಲ್ ವಿಳಾಸ rharagopal@gmail.com.